Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Licence de mathématiques, 2e année
Algèbre Linéaire 2 (MAT06)

Partiel 1
Jeudi 25 octobre 2012

☒ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Deux heures, ni calculatrices, ni documents

Enseignants : T. Coulbois, F. Palesi, H. Short

Exercice 1. (Cours, 6 points) Soit $f : V \to V$ un endomorphisme linéaire d'un espace vectoriel V de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

(1) Pour une base $\mathcal{B}$ de V, donner la définition de la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
(2) Montrer que le déterminant de A ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$.
(3) Donner les définitions des valeurs propres de f, et des sous-espaces propres associés.
(4) Donner la définition du polynôme caracteristique de f.

Exercice 2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 5 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(1) Calculer A^2.
(2) Montrer que le vecteur $(0, -1, 1)$ est vecteur propre de A. En déduire que -1 est une valeur propre de A.
(3) Calculer le polynôme caractéristique de A. Déterminer les racines de ce polynome dans $\mathbb{C}$.
(4) En déduire que A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ mais est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
(5) Donner le spectre de la matrice A^4 (sans calculer A^4).
(6) En déduire que $A^4 = I_3$.
(7) Donner la matrice de changement de base qui rend la matrice diagonale.

Tournez la page SVP.

Problème

Première partie.

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent : $AB = BA$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A et soit E_λ le sous-espace propre associé.

(1) Montrer que pour tout vecteur u du sous-espace propre E_λ de A, le vecteur Bu est aussi dans E_λ.

(2) Montrer que si E_λ est de dimension 1, alors tout vecteur propre u de A associé à λ est aussi un vecteur propre de B.

(3) Montrer que si A possède n valeurs propres deux-à-deux distinctes, et si $\mathcal{B}' = (u_1, \ldots, u_n)$ est une base de vecteurs propres de A et P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{B}'$, alors $P^{-1}BP$ est diagonale.

Deuxième partie.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, et soit $\mathrm{Comm}(A) = \{B \in M_2(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$ l'ensemble des matrices 2×2 qui commutent avec A.

(1) Montrer que $\mathrm{Comm}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

(2) Montrer que $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A associés à des valeurs propres que l'on calculera.

(3) Déduire de la première partie que si $B \in$ Comm(A), et si P est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ alors $P^{-1}BP$ est de la forme $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$.

(4) En déduire que $\mathrm{Comm}(A)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2.